第17講　定積分と面積

§1　定積分

要点整理 と 公式

要点1　定積分

関数 $f(x) = 3x^2$ の不定積分は $\int 3x^2dx = x^3 + C$（Cは積分定数）と表される。

これを$F(x)$とおくと，$F(x) = x^3 + C$　となり，これは x の関数である。

ここで，$F(3) - F(1)$ を計算すると

$$F(3) - F(1) = (3^3 + C) - (1^3 + C) = 26$$

となり，この値は，積分定数 C とは無関係に 1 つに定まる。

一般に，関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$とするとき，

$$F(b) - F(a)$$

の値を，$f(x)$ の a から b までの「 定積分 」といい，記号「 $\int f(x)\,dx$」で表す。

a をこの定積分の「 下端（かたん） 」，b を「 上端（じょうたん） 」という。

また，$F(b) - F(a)$ を記号「　　　　　　 」で表す。

■ **定積分**

$F'(x) = f(x)$ のとき

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$$

(ex)　$\int_1^2 x^2dx =$

定積分の値は，積分定数 C の値に無関係であることより，不定積分の定数項を「 0 」とするとよい。

また，定積分 $\int_a^b f(x)dx$ を求めることを，$f(x)$を「a から b まで積分」するという。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^3 (2x+3)\,dx$　　(2) $\int_{-2}^1 (3x^2-18x-21)\,dx$

Point Pickup

定積分

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

①　関数 $f(x)$ の不定積分 $F(x)$ のうち，定数項が 0 のものを求める。

②　$F(b) - F(a)$ を計算する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 定積分の性質

要点整理 と 公式

要点2 定積分の性質と計算

一般に，定積分の性質について次のことがいえる。

■ 定積分の性質 その１

k を定数とする

1． $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

2． $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

3． $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

これらの性質は，$f(x)$の不定積分の１つを $F(x)$とおくことで証明できる。

上記の性質を用いると，定積分の計算を「項ごと」に行うことができる。

(ex) $\int_2^4 (x^2-6x+8)dx = \int_2^4 x^2dx - 6\int_2^4 xdx + 8\int_2^4 dx$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^4 - 6\left[\frac{1}{2}x^2\right]_2^4 + 8\left[x\right]_2^4$$

$$= \frac{1}{3}(4^3-2^3) - 3(4^2-2^2) + 8(4-2)$$

$$= \frac{56}{3} - 36 + 16 = -\frac{4}{3}$$

また，積分区間が同じ定積分を１つにまとめることができる。

(ex) $\int_1^2 (2x-5)dx + \int_1^2 (x+4)dx = \int_1^2 \{(2x-5)+(x+4)\}dx$

$$= \int_1^2 (3x-1)dx$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点❸ 定積分の上端と下端に関する性質

一般に，定積分の上端と下端に関する性質について，次のことがいえる。

■ 定積分の性質 その2

4．$\int_a^a f(x)dx = 0$

5．$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

6．$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

これらの性質を用いると，積分区間の上端と下端の入れ換えや，積分区間の連結ができる。

(ex)　$\int_2^2 (3x^2 + x - 2)dx =$

$\int_1^{-3} (5x^2 - 4x)dx = \quad \int \quad (5x^2 - 4x)dx$

$\int_{-1}^1 (2x^2 + 5)dx + \int_1^2 (2x^2 + 5)dx = \quad \int \quad (2x^2 + 5)dx$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{1}^{1}(3x^2-5x)\,dx$　　(2) $\int_{-2}^{1}(3x^2-x+2)\,dx-\int_{2}^{1}(3x^2-x+2)\,dx$

Point Pickup

積分区間に関する定積分の性質

$\int_a^a f(x)dx=0$　　$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)\,dx$

これらを用いて，積分区間の上端と下端の交換や，積分区間を連結させることができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

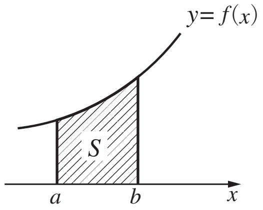
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ 定積分と面積

要点整理 と 公式

要点 4 定積分と面積

定積分を用いて，図形の面積を求めることを考える。



右図のように，区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ のとき，

曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で

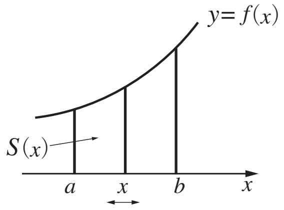
囲まれた部分の面積を S とする。

また区間内の x に対し，x 座標が a から x までの部分の

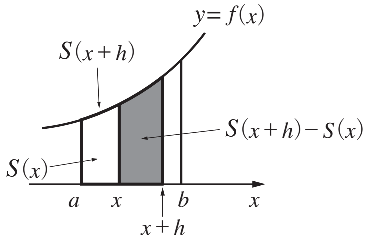
面積を $S(x)$ とおくと，$S(x)$ は x の関数であり，

$S(a)=0$,　　$S(b)=S$，　　$S=S(b)-S(a)$

である。



この面積 $S(x)$ が，$f(x)$ の不定積分の 1 つであることを示す。



$h>0$ として，x を h だけ増加させると，面積は

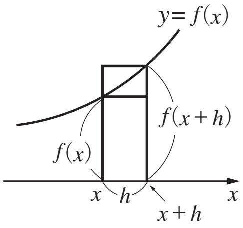
$S(x+h)-S(x)$

だけ増加する。

この増加した部分の面積と，横の長さが h，

縦の長さが $f(x)$，$f(x+h)$ の 2 つの長方形の

面積の大小関係から



$$h \cdot f(x) \leqq S(x+h)-S(x) \leqq h \cdot f(x+h)$$

が成り立つ。辺々を h で割ると

$$f(x) \leqq \frac{S(x+h)-S(x)}{h} \leqq f(x+h)$$

である。ここで，$h \to 0$ のとき，

$$f(x+h) \to f(x)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{S(x+h)-S(x)}{h} = S'(x)$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

であるから，

$f(x) \leqq S'(x) \leqq f(x)$　　つまり　　$S'(x) = f(x)$ である。

これは，$h<0$ においても同様である。

よって，面積 $S(x)$ は $f(x)$ の不定積分の1つである。

したがって，$S = S(b) - S(a) = \Big[S(x) \Big]_a^b = \int_a^b f(x)\,dx$　である。

一般に，次のことが成り立つ。

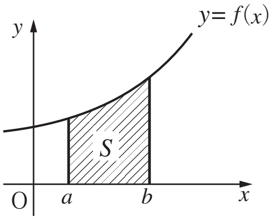
■ **定積分と面積①**

区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq 0$ のとき

曲線 $y = f(x)$ と x 軸，および2直線

$x = a$，$x = b$ で囲まれる部分の面積 S は

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$



次に，区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \leqq 0$ のとき，

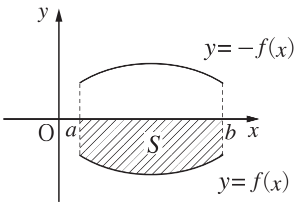
曲線 $y = f(x)$ と x 軸，および2直線 $x = a$，$x = b$ で

囲まれる部分の面積 S は，右図のように

曲線 $y = f(x)$ を x 軸に関して対称に移動した曲線

$y = -f(x)$ と x 軸，および2直線 $x = a$，$x = b$ で

囲まれる部分の面積に等しい。



したがって，次のことが成り立つ。

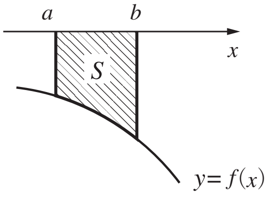
■ **定積分と面積②**

区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \leqq 0$ のとき

曲線 $y = f(x)$ と x 軸，および2直線

$x = a$，$x = b$ で囲まれる部分の面積 S は

$$S = \int_a^b \{-f(x)\}\,dx$$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

次の曲線と 2 直線，および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

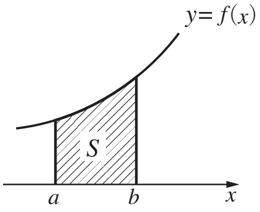
(1)　$y = x^2 + 1$，$x = -1$，$x = 2$

(2)　$y = -x^2 + 2x - 3$，$x = 0$，$x = 3$

Point Pickup

曲線と x 軸の間の面積

曲線 $y = f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれる部分の面積 S の求め方は以下。



①　$y = f(x)$ のグラフをかく。

②　区間 $a \leqq x \leqq b$ において，$f(x)$ のグラフと x 軸の上下関係を調べる。

③　②において

常に $f(x) \geqq 0$ のとき　$S = \int_a^b f(x)\,dx$

常に $f(x) \leqq 0$ のとき　$S = \int_a^b \{-f(x)\}\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

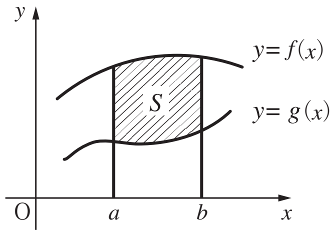
{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4　2つのグラフの間の面積

要点整理 と 公式

要点5　2つの曲線の間の部分の面積

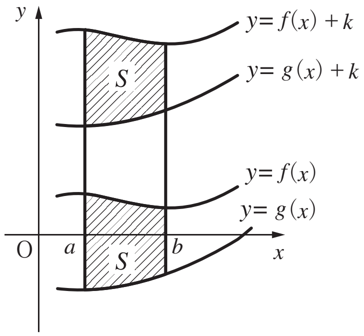


2つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$，および2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S を定積分で表す。

まず区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq g(x) \geqq 0$ のときは，求める面積 S は，$a \leqq x \leqq b$ における $y=f(x)$ と x 軸の間の面積から，$y=g(x)$ と x 軸の間の面積を引いたものとして求められるから，

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

と表される。



また，区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ であるが，$f(x)$ や $g(x)$ が負の値をとることがあるときは，$f(x)$，$g(x)$ を y 軸方向に k だけ平行移動し，2つのグラフがこの区間で常に x 軸より上側にあるようにする。このとき，

$$S=\int_a^b \{(f(x)+k)-(g(x)+k)\}dx=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

と表される。

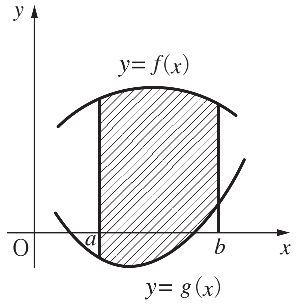
よって，次のことが成り立つ。

■ **2つの曲線の間の面積**

区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき，

2つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$，および2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛メモ｝

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

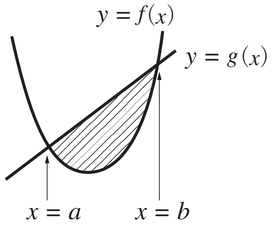
［1］　放物線　$y = x^2 - x$ と x 軸によって囲まれた部分の面積を求めよ。

［2］　放物線　$y = -x^2 + 4x + 2$ と $y = 2x - 1$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

Point Pickup

曲線と直線の間の面積

曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = g(x)$ で囲まれる部分の面積 S の求め方は以下。



① $y = f(x)$，$y = g(x)$ のグラフをかく。

② 方程式 $f(x) = g(x)$ を解き，曲線と直線の交点の x 座標 $x = a,\ b$ を求める。

③ ②の交点を元に，積分範囲を定める。

④ ③の範囲において

常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき　$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx$

常に $g(x) \geqq f(x)$ のとき　$S = \int_a^b \{g(x) - f(x)\}\,dx$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

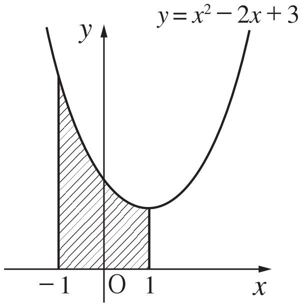
第17講　確認テスト

1　$\int_{-1}^{3}(3x^2-4x-5)\,dx=\boxed{\text{アイ}}$ である。

2　$\int_{1}^{1}x^2\,dx=\boxed{\text{ウ}}$ である。

また，$\int_{1}^{2}(3x-1)\,dx+\int_{2}^{3}(3x-1)\,dx=\int_{1}^{\boxed{\text{エ}}}(3x-1)\,dx=\boxed{\text{オカ}}$ である。

3　放物線 $y=x^2-2x+3$ と x 軸，および 2 直線 $x=-1,\ 1$ で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。



4　(1)　$y=x^2-3x$ と x 軸によって囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

(2)　放物線 $y=-x^2+4x-5$ と直線 $y=-2x$ の交点の x 座標は $x=\boxed{\text{シ}},\ \boxed{\text{ス}}$ である。

ただし，$\boxed{\text{シ}}<\boxed{\text{ス}}$ とする。

よって，この放物線と直線で囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第17講　定積分と面積

1

(1) $\int_1^3 (2x+3)\,dx = \left[x^2+3x\right]_1^3$

$= (3^2+3\cdot 3)-(1^2+3\cdot 1) = 18-4 = 14$

(2) $\int_{-2}^1 (3x^2-18x-21)\,dx = \left[x^3-9x^2-21x\right]_{-2}^1$

$= (1^3-9\cdot 1^2-21\cdot 1)-\{(-2)^3-9\cdot(-2)^2-21\cdot(-2)\}$

$= (-29)-(-2) = -27$

2

(1) $\int_1^1 (3x^2-5x)\,dx = 0$

(2) $\int_{-2}^1 (3x^2-x+2)\,dx - \int_2^1 (3x^2-x+2)\,dx$

$= \int_{-2}^1 (3x^2-x+2)\,dx + \int_1^2 (3x^2-x+2)\,dx$

$= \int_{-2}^2 (3x^2-x+2)\,dx$

$= 3\int_{-2}^2 x^2\,dx - \int_{-2}^2 x\,dx + 2\int_{-2}^2 dx$

$= 3\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^2 - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^2 + 2\left[x\right]_{-2}^2$

$= \{2^3-(-2)^3\} - \frac{1}{2}\{2^2-(-2)^2\} + 2\{2-(-2)\}$

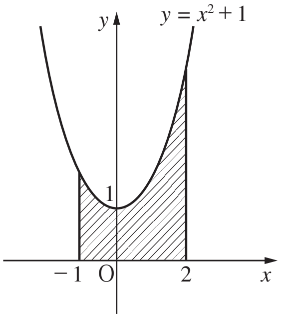
$= (8+8)-\frac{1}{2}(4-4)+2(2+2)$

$= 16-0+8 = 24$

3

(1) 右図より

$S = \int_{-1}^2 (x^2+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^2$



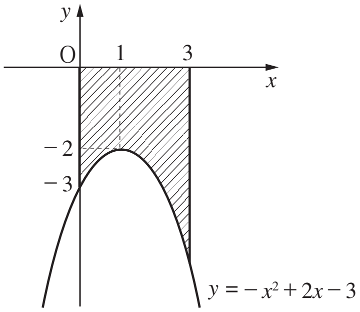
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$=\left(\frac{8}{3}+2\right)-\left(-\frac{1}{3}-1\right)=6$$

(2)　$y=-x^2+2x-3=-(x-1)^2-2$ より，

区間 $0 \leqq x \leqq 3$ では $y<0$　である。

よって，求める面積は



$$S=\int_0^3 \{-(-x^2+2x-3)\}\,dx$$

$$=\int_0^3 (x^2-2x+3)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_0^3=(9-9+9)-(0-0+0)=9$$

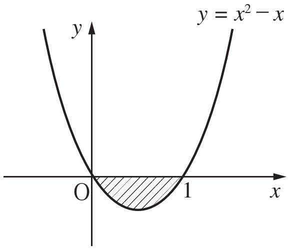
4

［1］　放物線 $y=x^2-x$ と x 軸との交点の x 座標は

方程式 $x^2-x=0$　を解いて

$x(x-1)=0$　より　$x=0,\ 1$

よって，求める部分の面積は



$$\int_0^1 \{-(x^2-x)\}\,dx$$

$$=\int_0^1 (-x^2+x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-(0+0)=\frac{1}{6}$$

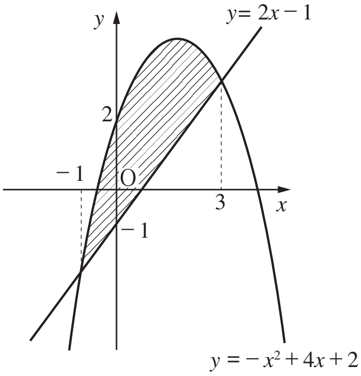
［2］　放物線 $y=-x^2+4x+2$ と $y=2x-1$ の交点の x 座標は

方程式 $-x^2+4x+2=2x-1$　を解いて

$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$　より　$x=-1, 3$　である。

よって，求める部分の面積は



$$\int_{-1}^3 \{(-x^2+4x+2)-(2x-1)\}\,dx$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$= \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3} = (-9 + 9 + 9) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3\right) = \frac{32}{3}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第17講　確認テスト

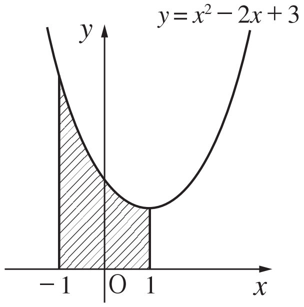
1　$\int_{-1}^{3}(3x^2-4x-5)\,dx=$ [アイ] である。

2　$\int_{1}^{1}x^2\,dx=$ [ウ] である。

また，$\int_{1}^{2}(3x-1)\,dx+\int_{2}^{3}(3x-1)\,dx=\int_{1}^{[エ]}(3x-1)\,dx=$ [オカ] である。

3　放物線 $y=x^2-2x+3$ と x 軸，および 2 直線 $x=-1,\ 1$ で

囲まれた部分の面積は $\dfrac{[キク]}{[ケ]}$ である。



4　(1)　$y=x^2-3x$ と x 軸によって囲まれた部分の面積は $\dfrac{[コ]}{[サ]}$ である。

(2)　放物線 $y=-x^2+4x-5$ と直線 $y=-2x$ の交点の x 座標は $x=$ [シ]，[ス] である。

ただし，[シ] < [ス] とする。

よって，この放物線と直線で囲まれる部分の面積は $\dfrac{[セソ]}{[タ]}$ である。

{解答}

1　ア　−　　イ　8

2　ウ　0　　エ　3　　オ　1　　カ　0

3　キ　2　　ク　0　　ケ　3

4　(1)　コ　9　　サ　2

(2)　シ　1　　ス　5　　セ　3　　ソ　2　　タ　3

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。